

第3章 | 数学と人間の活動



1 約数と倍数

A 身の回りの約数と倍数

まとめ

3章

数学と人間の活動

バーコード

身の回りの商品には13桁^{けた}の数字が並んだバーコードが付いている。この数字に入っている情報を機械で読み取ったときに、読み取りミスがあったかどうかを判定するのに、整数の倍数が利用されている。

教 p.126

練習
1

身近にある商品のバーコードの数字について、次の問いに答えよ。

- (1) (左から奇数桁目の数の和)+(左から偶数桁目の数の和) $\times 3$ を求めよ。
- (2) クラスの他の人が求めた(1)の値とも比較して、気づいたことをいえ。

指針 バーコードの13桁の数字 左から12桁目までの数字は商品ごとに振られたものであるが、最後の13桁目の数字は、上の(1)の計算で求める値が10の倍数になるように振られている。機械で読み取ったときに10の倍数にならなかったら、読み取りミスがあったと判定する。

解答 (1) 例 9784410803666 の場合

左から奇数桁目の数の和は

$$9+8+4+0+0+6+6=33$$

左から偶数桁目の数の和は

$$7+4+1+8+3+6=29$$

ゆえに、(左から偶数桁目の数の和) $\times 3$ は 87

よって、求める値は $33+87=120$ 答

(2) 例 1924337000009 の場合

左から奇数桁目の数の和は $1+2+3+7+0+0+9=22$

左から偶数桁目の数の和は $9+4+3+0+0+0=16$

ゆえに、(左から偶数桁目の数の和) $\times 3$ は 48

よって (左から奇数桁目の数の和)+(左から偶数桁目の数の和) $\times 3$
 $=22+48=70$

したがって、(1)の結果とあわせて、

(左から奇数桁目の数の和)+(左から偶数桁目の数の和) $\times 3$

は10の倍数になると考えられる。 **終**

B 約数と倍数

まとめ

1 整数

自然数1, 2, 3, ……に, 0と-1, -2, -3, ……を合わせて 整数 という。

2 約数と倍数

2つの整数 a , b について

ある整数 k を用いて $a=bk$ と表される

とき, b は a の 約数 であるといい, a は b の 倍数 であるという。

$a=bk$ のとき, $a=(-b)\cdot(-k)$ でもあるから, b が a の約数ならば $-b$ も a の約数である。

練習 2

次の問いに答えよ。

(1) 12の約数をすべて求めよ。

(2) 6の正の倍数を小さいものから5個求めよ。

教 p.127

指針 約数と倍数 $a=b\times(\text{整数})$ と表されるとき, b は a の約数, a は b の倍数であるという。

解答 (1) 1, 2, 3, 4, 6, 12, -1, -2, -3, -4, -6, -12 **答**

(2) 6, 12, 18, 24, 30 **答** $\leftarrow 0$ は正の数でも負の数でもない。

別解 (1) $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ **答**

C 倍数の判定法

まとめ

倍数の判定法(1)

2の倍数 ……一の位が0, 2, 4, 6, 8のいずれか

4の倍数 ……下2桁が4の倍数

5の倍数 ……一の位が0か5

8の倍数 ……下3桁が8の倍数

10の倍数 ……一の位が0

練習
3

8 の倍数が前ページのまとめの方法で判定できる理由を、4 桁の自然数 N の場合で説明せよ。

指針 8 の倍数の判定法の説明 $N=1000a+100b+10c+d$ と表して説明する。このとき、 $1000a=8 \cdot 125a$ は 8 の倍数である。

解答 4 桁の自然数 N は、千の位を a 、百の位を b 、十の位を c 、一の位を d とすると、

$N=1000a+100b+10c+d$ で表される。

$1000=8 \cdot 125$ より、 $1000a$ は 8 の倍数であるから、 N が 8 の倍数になるのは $100b+10c+d$ 、すなわち下 3 桁が 8 の倍数のときである。 **終**

まとめ

倍数の判定法(2)

3 の倍数 ……各位の数の和が 3 の倍数

9 の倍数 ……各位の数の和が 9 の倍数

3
章

数学と人間の活動

練習
4

5 桁の自然数 $85\square 71$ が 9 の倍数であるとき、 $\square$ に入る数を求めよ。

指針 9 の倍数の判定法 5 桁の各位の数の和は 9 の倍数である。

解答 $\square$ に入る数を a ($0 \leq a \leq 9$) とする。

$8+5+a+7+1=21+a$ が 9 の倍数であるとき、5 桁の自然数は 9 の倍数になる。

$21+a$ が 9 の倍数になるのは、 $a=6$ のときである。

よって、求める数は 6 **答**

参考 教科書 129 ページ『■ 11 の倍数の判定法』の $\square$ に入る数は、

$$\begin{aligned} -100a-10b-c+d &= (-99-\square)a + (-11+\square)b - c + d \\ &= 11(-9a-b) - a + b - c + d \end{aligned}$$

したがって、11 の倍数の判定法は次のようになる。

(偶数桁目の数の和) と (奇数桁目の数の和) の **差** が 11 の倍数

例 $3256 \cdots (2+6) - (3+5) = 0 = 11 \cdot 0$ $\leftarrow 3256 = 11 \cdot 296$
 $8173 \cdots (1+3) - (8+7) = -11 = 11 \cdot (-1)$ $\leftarrow 8173 = 11 \cdot 743$
 $27390 \cdots (7+9) - (2+3+0) = 11 = 11 \cdot 1$ $\leftarrow 27390 = 11 \cdot 2490$

2 素数と素因数分解

A 素数

まとめ

1 素数

5 の正の約数は 1 と 5 だけである。このように、2 以上の自然数で、1 とそれ自身以外に正の約数をもたない数を **素数** という。

2 合成数

2 以上の自然数で、素数でない数を **合成数** という。

練習 5

古代ギリシャのエラトステネスが考案したとされる「エラトステネスのふるい」という方法を用いて、100 以下の素数を求めてみよう。

[1] 1 は素数でないから、斜線で消す。

[2] 2 に○を付けて残す。2 以外の 2 の倍数を斜線で消す。

[3] 何もされていない最小の数 3 に○を付けて残す。3 以外の 3 の倍数を斜線で消す。

このような作業を続け、○を付けて残した数が素数である。

教 p.130

指針 エラトステネスのふるい

[3]に続いては、

[4] 5 に○を付けて残す。5 以外の 5 の倍数を斜線で消す。

[5] 7 に○を付けて残す。7 以外の 7 の倍数を斜線で消す。

100 以下の素数を見つけるには、ここまですれば十分である。11 以外の 11 の倍数などはすでに消されている。

解答 作業を続けると右のようになる。

したがって、100 以下の素数は

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,
19, 23, 29, 31, 37, 41,
43, 47, 53, 59, 61, 67,
71, 73, 79, 83, 89, 97 **答**

1	②	③	4	⑤	6
⑦	8	9	10	⑪	12
⑬	14	15	16	⑰	18
⑲	20	21	22	⑳	24
25	26	27	28	㉑	30
㉓	32	33	34	35	36
㉗	38	39	40	㉙	42
㉛	44	45	46	㉝	48
49	50	51	52	㉟	54
55	56	57	58	㊱	60
㊳	62	63	64	65	66
㊶	68	69	70	㊸	72
㊺	74	75	76	77	78
㊼	80	81	82	㊾	84
85	86	87	88	㊿	90
91	92	93	94	95	96
㊿	98	99	100		

前ページの数の並びを見ると、素数が何度も現れる列とそうでない列がある。このことから素数についてどのようなことが成り立ちそうか予想してみよう。

- 解答 例** 2行目以降、素数は数の並びの1列目と5列目のみに現れている。
 数は1行に6個ずつ並んでいることから、1列目、5列目の数は、6で割ったときの余りがそれぞれ1, 5である数である。
 よって、7以上の素数を6で割ったときの余りは1または5であると予想できる。 終

B 素因数分解

まとめ

素因数分解

$15=3 \cdot 5$, $60=3 \cdot 4 \cdot 5$ のように、整数がいくつかの整数の積で表されるとき、積を作る1つ1つの整数を、もとの数の **因数** という。素数である因数を **素因数** といい、自然数を素数だけの積の形に表すことを **素因数分解** するという。

合成数は、必ず素因数分解できる。また、1つの合成数の素因数分解は、積の順序の違いを除けばただ1通りである。このことを、素因数分解の一意性という。

練習 6

次の数を素因数分解せよ。

(1) 144

(2) 180

(3) 525

指針 素因数分解 たとえば、120の素因数分解は、次のようにして行う。

- ① 120を最小の素数2で割り切れる限り割り続けると、 $2 \overline{)120}$
 15が得られる。 $2 \overline{)60}$
 ② 15を次の素数3で割ると、5が得られる。 $2 \overline{)30}$
 ③ 5は素数である。 $3 \overline{)15}$
 よって、 $120=2^3 \cdot 3 \cdot 5$ のように素因数分解できる。5

- 解答** (1) $144=2^4 \cdot 3^2$ 答 (1) $2 \overline{)144}$ (2) $2 \overline{)180}$ (3) $3 \overline{)525}$
 (2) $180=2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ 答 $2 \overline{)72}$ $2 \overline{)90}$ $5 \overline{)175}$
 (3) $525=3 \cdot 5^2 \cdot 7$ 答 $2 \overline{)36}$ $3 \overline{)45}$ $5 \overline{)35}$
 $2 \overline{)18}$ $3 \overline{)15}$ 7
 $3 \overline{)9}$ 5
3

C 素因数分解と約数

まとめ

 n^0 一般に、自然数 n に対して、 $n^0=1$ と定める。

自然数の約数を求める

自然数を素因数分解すると、その正の約数がすべて求められる。

練習
7

教 p.132

次の数の正の約数をすべて求めよ。

(1) 56

(2) 90

指針 素因数分解を利用して正の約数を求める たとえば、200 の正の約数は、 $2^a \cdot 5^b$ ($a=0, 1, 2, 3; b=0, 1, 2$) と表されるから、そのすべての正の約数は a, b にそれぞれ数を代入して求めることができる。

$$2^0 \cdot 5^0 = 1 \cdot 1 = 1, \quad 2^0 \cdot 5^1 = 1 \cdot 5 = 5, \quad 2^0 \cdot 5^2 = 1 \cdot 25 = 25,$$

$$2^1 \cdot 5^0 = 2 \cdot 1 = 2, \quad 2^1 \cdot 5^1 = 2 \cdot 5 = 10, \quad 2^1 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50, \quad \dots$$

解答 (1) 56 を素因数分解すると $56 = 2^3 \cdot 7$

よって、56 の正の約数は

$$2^0 \cdot 7^0 = 1, \quad 2^0 \cdot 7^1 = 7, \quad 2^1 \cdot 7^0 = 2, \quad 2^1 \cdot 7^1 = 14,$$

$$2^2 \cdot 7^0 = 4, \quad 2^2 \cdot 7^1 = 28, \quad 2^3 \cdot 7^0 = 8, \quad 2^3 \cdot 7^1 = 56$$

すなわち 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56 答

(2) 90 を素因数分解すると $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

よって、90 の正の約数は

$$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 1, \quad 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 5, \quad 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 3, \quad 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 15,$$

$$2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 9, \quad 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 45, \quad 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 2, \quad 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 10,$$

$$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 6, \quad 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30, \quad 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 18, \quad 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 90$$

すなわち 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 答

まとめ

約数の個数

自然数 N の素因数分解が $N = p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdot \dots$ であるとき、 N の正の約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1) \cdot \dots$ である。

練習
8

教 p.133

次の数の正の約数の個数を求めよ。

(1) 75

(2) 450

指針 約数の個数 自然数 N の素因数分解が $N = p^a \cdot q^b$ となるとき、 N の正の約数の個数は $(a+1)(b+1)$

解答 (1) 75 を素因数分解すると $75 = 3 \cdot 5^2$

よって、75 の正の約数の個数は

$$(1+1)(2+1) = 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{答} \quad 6 \text{ 個}$$

(2) 450 を素因数分解すると $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

よって、450 の正の約数の個数は

$$(1+1)(2+1)(2+1) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18 \quad \text{答} \quad 18 \text{ 個}$$

3 章

数学と人間の活動

教 p.133

練習 9

15 枚のカードを並べ、表に 1 から 15 までの整数を 1 個ずつ順に書く。



まず、すべてのカードをひっくり返す。



そして、左から 2 番目ごとにカードをひっくり返す。



次に、左から 3 番目ごとにカードをひっくり返す。



4 番目ごと、5 番目ごと、……、15 番目ごとまで同じことを行う。



裏になっているカードの数は 1, 4, 9, すなわち $1^2, 2^2, 3^2$ である。

(1) 裏になっているカードがひっくり返された回数は、偶数か、奇数か答えよ。

(2) 裏になっているカードの数の正の約数の個数は、偶数か、奇数か答えよ。

(3) 裏になっているカードの数が n^2 (n は自然数) の形をした数だけである理由を説明せよ。

指針 約数の性質の利用 (1) 奇数回で裏, 偶数回で表になる。

(2) ひっくり返す操作は, カードの整数が 1 の倍数, 2 の倍数, 3 の倍数, …… , 15 の倍数の順に行われる。カードから見ると, 正の約数の個数と同じ回数だけひっくり返される。

(3) 裏になっているカードの数の正の約数の個数は奇数個である。

正の約数の個数 $(a+1)(b+1) \cdots$ が奇数になるのは, $a, b, \dots$ がすべて偶数のときである。

解答 (1) 奇数 答

(2) カードは, 書かれている整数の正の約数の個数と同じ回数だけひっくり返される。(1)より, 正の約数の個数は, 奇数 答

(3) 正の約数の個数が奇数になるのは, 素因数分解したときの指数がすべて偶数, すなわち, もとの数が平方数のときである。

したがって, 裏になっているカードに書かれている数は n^2 (n は自然数) の形をした数だけである。終

3 最大公約数・最小公倍数

A 最大公約数

まとめ

最大公約数

2 つ以上の整数に共通な約数を, それらの整数の 公約数 といい, 公約数のうち最大のものを 最大公約数 という。

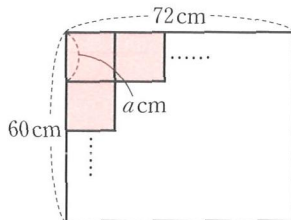
練習 10

教科書 134 ページの問題について答えよ。

- (1) 60 を等分できる正の整数をすべて求めよ。
- (2) 72 を等分できる正の整数をすべて求めよ。
- (3) a の値を求めよ。

教 p.134

指針 長方形に正方形を敷き詰める(1) 右の図の長方形の枠に, 1 辺 a cm の正方形のタイルをすき間なく敷き詰める。 a の値をできるだけ大きくしたい。60, 72 を等分できる整数は, それぞれ 60, 72 の正の約数である。両方に共通する最大の整数を a とする。



解答 (1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 答

(2) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72 答

(3) a の値は, (1)と(2)に共通する最大の整数である。 $a=12$ 答

練習 11

素因数分解を利用して, 次の数の組の最大公約数を求めよ。

(1) 60, 72

(2) 378, 840

(3) 28, 84, 180

指針 素因数分解と最大公約数 素因数分解を利用して, 最大公約数を求める。2つの整数の最大公約数は, 2つの整数が共通してもつ素因数をすべて掛けて得られる積となる。右は, 24と180の最大公約数を求める例である。3つの整数の場合も同様の手順でよい。

最大公約数

$$\begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad 2^2 \cdot 3 = 12 \end{array}$$

指数の小さい方

解答 (1) 60, 72 を素因数分解すると

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

したがって, 求める最大公約数は $2^2 \cdot 3 = 12$ 答

(2) 378, 840 を素因数分解すると

$$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

したがって, 求める最大公約数は $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ 答

(3) 28, 84, 180 を素因数分解すると

$$28 = 2^2 \cdot 7$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

したがって, 求める最大公約数は $2^2 = 4$ 答

注意 たとえば, 8と15のように正の公約数は1だけのことがある。2つの整数の最大公約数が1のとき, これらの整数は 互いに素 であるという。

練習 12

縦 216 mm, 横 480 mm, 高さ 144 mm の直方体の箱に, 1 辺の長さ a mm の立方体の積み木をすき間なく詰めたい。積み木をできるだけ大きくするには a の値をいくりにすればよいか。ただし, a は整数とする。

教 p.135

3 章

数学と人間の活動

練習 10 の a の値は長方形の2辺の長さの最大公約数だったんだね。求め方を(1)と比べてみよう。



教 p.135

指針 最大公約数の利用 216 と 480 と 144 の最大公約数を求めればよい。

解答 216, 480, 144 を素因数分解すると

$$216=2^3 \cdot 3^3$$

$$480=2^5 \cdot 3 \cdot 5$$

$$144=2^4 \cdot 3^2$$

これらの最大公約数は $2^3 \cdot 3 = 24$

よって、求める a の値は $a = 24$ 答

B 最小公倍数

まとめ

最小公倍数

2 つ以上の整数に共通な倍数を、それらの整数の 公倍数 といい、公倍数のうち正で最小のものを 最小公倍数 という。

練習 13

素因数分解を利用して、次の数の組の最小公倍数を求めよ。

(1) 60, 72

(2) 378, 840

(3) 28, 84, 180

教 p.137

指針 素因数分解と最小公倍数 素因数分解を利用して、最小公倍数を求める。2 つの整数の両方を因数にもつ数のうち最小のものがある。右は、24 と 180 の最小公倍数を求める例である。練習 11 の最大公約数を求める解答と見比べて、最大公約数の求め方、最小公倍数の求め方の理解を深めておくとよい。

最小公倍数

$$\begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360 \\ \text{指数の大きい方} \end{array}$$

解答 (1) 60, 72 を素因数分解すると

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

よって、求める最小公倍数は $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ 答

(2) 378, 840 を素因数分解すると

$$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

よって、求める最小公倍数は $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7560$ 答

(3) 28, 84, 180 を素因数分解すると

$$28 = 2^2 \cdot 7$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

よって、求める最小公倍数は $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$ 答

練習
14

ハレーすい星など、周期的に太陽に最接近するすい星がいくつか知られている。すい星 A が太陽に最接近する周期が 15 年、すい星 B が太陽に最接近する周期が 155 年であるとする。2 つのすい星がある同じ年に太陽に最接近したとすると、2 つのすい星が、次に同じ年に太陽に最接近するのは何年後と予想されるか。

指針 最小公倍数の利用 15 と 155 の最小公倍数を求めればよい。

解答 15, 155 を素因数分解すると

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$155 = 5 \cdot 31$$

これらの最小公倍数は $3 \cdot 5 \cdot 31 = 465$

したがって、2 つのすい星が、次に同じ年に太陽に最接近するのは 465 年後と予想される。 答 465 年後

3
章

数学と人間の活動

4 整数の割り算

A 年齢当てクイズ

まとめ

年齢当てクイズ

「私の年齢を 3 で割った余りは 2, 5 で割った余りは 3, 7 で割った余りは 4 です。私の年齢を当ててください。ただし、105 歳より下です。」というクイズがある。どうやって答えを出せばよいだろうか。

練習
15

104 以下の自然数について、次の問いに答えよ。

- (1) 7 で割った余りが 4 になる自然数を「4 11 18 ……」のように書き出せ。
- (2) (1)の自然数を 5 で割ったときの余りをその数の下につけ。
- (3) (2)で余りが 3 になった自然数について、3 で割った余りをさらにその下につけ、余りが 2 になる自然数を見つけよ。

指針 年齢当てクイズの答えの出し方 ある整数を割るとき、割る数が 7, 5, 3 の順に、考えられる商の個数は増えていく。したがって、(1)~(3)の手順に従い、答えとなる整数の候補が少ない条件から順に考えていく。

解答 (1) 4, 11, 18, 25, 32, 39, 46, 53, 60, 67, 74, 81, 88, 95, 102 答
(2), (3)

	4	11	18	25	32	39	46	53
5で割った余り	4	1	3	0	2	4	1	3
3で割った余り			0					2

	60	67	74	81	88	95	102
5で割った余り	0	2	4	1	3	0	2
3で割った余り					1		

答

答 53

← 3で割った余りが2

B 整数の割り算

まとめ

1 整数の割り算

整数 a と正の整数 b に対して

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

を満たす整数 q と r がただ1通りに定まる。

2 商・余り

q を、 a を b で割ったときの 商、 r を 余り という。 $r=0$ のとき、 a は b で割り切れる といい、 $r \neq 0$ のとき 割り切れない という。

練習
16

教 p.139

次の a 、 b について、 a を b で割ったときの商と余りを求めよ。

(1) $a=28, b=6$

(2) $a=-20, b=3$

指針 整数の割り算 $a=bq+r$ ($0 \leq r < b$) のとき、 q を、 a を b で割ったときの商、 r を余りという。

解答 (1) $28=6 \cdot 4 + 4$ であるから

28 を 6 で割ったときの 商は 4, 余りは 4 答

(2) $-20=3 \cdot (-7) + 1$ であるから

-20 を 3 で割ったときの 商は -7 , 余りは 1 答

(2)の商と
余りに注目!



C 割り算の余りの性質

まとめ

和の余り, 積の余り

たとえば, 2つの整数 a, b が, 整数 k, ℓ を用いて, $a=7k+5, b=7\ell+4$ と表されるとき, 次のことがいえる。

$$\left(\begin{array}{l} a+b \text{ を } 7 \text{ で割った} \\ \text{ときの余り} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{余りの和 } 5+4 \text{ を } 7 \text{ で} \\ \text{割ったときの余り} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} ab \text{ を } 7 \text{ で割った} \\ \text{ときの余り} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{余りの積 } 5 \cdot 4 \text{ を } 7 \text{ で} \\ \text{割ったときの余り} \end{array} \right)$$

3章

数学と人間の活動

練習 17

教 p.140

a, b は整数とする。 a を 5 で割ると 3 余り, b を 5 で割ると 4 余る。
次の数を 5 で割ったときの余りを求めよ。

$$(1) a+b \quad (2) 2a+3b \quad (3) ab \quad (4) a^2+b^2$$

指針 割り算の余りの性質 a, b をそれぞれ整数 k, ℓ を用いて表し, 式を計算して, $5q+r$ の形に変形する。 r が余りである。

解答 a, b は, 整数 k, ℓ を用いて $a=5k+3, b=5\ell+4$ と表される。

$$(1) a+b=(5k+3)+(5\ell+4)=5(k+\ell)+3+4=5(k+\ell+1)+2$$

よって, $a+b$ を 5 で割ったときの余りは 2 答

$$(2) 2a+3b=2(5k+3)+3(5\ell+4)=5(2k+3\ell+3)+3$$

よって, $2a+3b$ を 5 で割ったときの余りは 3 答

$$(3) ab=(5k+3)(5\ell+4)=5^2k\ell+5k \cdot 4+3 \cdot 5\ell+3 \cdot 4 \\ =5(5k\ell+4k+3\ell+2)+2$$

よって, ab を 5 で割ったときの余りは 2 答

$$(4) a^2+b^2=(5k+3)^2+(5\ell+4)^2 \\ =5^2k^2+5 \cdot 6k+9+5^2\ell^2+5 \cdot 8\ell+16 \\ =5(5k^2+6k+5\ell^2+8\ell+5)$$

よって, a^2+b^2 を 5 で割ったときの余りは 0 答

練習 18

教 p.141

a, b, c は $0 \leq a < 3, 0 \leq b < 5, 0 \leq c < 7$ である整数とする。
 $70a+21b+15c$ を 3, 5, 7 で割った余りはそれぞれ a, b, c であることを示せ。

指針 百五減算 年齢当てクイズで取り上げた問題の答えを x 歳とすると, x を 3, 5, 7 で割った余りがそれぞれ a, b, c であるとき, x は, $70a+21b+15c$ を 105 で割った余りに等しい。105 は 3, 5, 7 の最小公倍数である。江戸時代の数学書に百五減算と呼ばれて記されている。

$70a+21b+15c$ が, それぞれ $3q+a, 5q+b, 7q+c$ と表されることを示す。

解答 $N=70a+21b+15c$ とする。

$$N=a+69a+21b+15c=a+3(23a+7b+5c)$$

$0 \leq a < 3$ であるから, N を 3 で割った余りは a である。

$$N=70a+20b+b+15c=b+5(14a+4b+3c)$$

$0 \leq b < 5$ であるから, N を 5 で割った余りは b である。

$$N=70a+21b+14c+c=c+7(10a+3b+2c)$$

$0 \leq c < 7$ であるから, N を 7 で割った余りは c である。終

注意 年齢当てクイズの別解 $70 \cdot 2 + 21 \cdot 3 + 15 \cdot 4 = 263$ を 105 で割ると, $263 = 105 \cdot 2 + 53$ より, 余りは 53 になる。年齢は 53 歳であるとわかる。

参考 教科書 141 ページの 15~21 行目。 $70a+21b+15c$ の係数 70, 21, 15 はどのように定められているのだろうか。

次の□に適する数を入れて考えよう。

70 は 5 と 7 の公倍数で, □3□ で割ったときの余りが 1

21 は 3 と 7 の公倍数で, □5□ で割ったときの余りが 1

15 は 3 と 5 の公倍数で, □7□ で割ったときの余りが 1

である。

練習 19

教 p.141

3 で割ると 2 余り, 5 で割ると 1 余り, 11 で割ると 5 余る自然数のうち最小のものを求めよ。

指針 百五減算の考え方の利用 上の参考と同様の考え方で, a, b, c の係数を決めて, $\square a + \square b + \square c$ の形の式をつくる。 a, b, c にそれぞれの余りを代入して計算した値を, 3, 5, 11 の最小公倍数 165 で割って余りを求めればよい。

解答 5 と 11 の公倍数, すなわち 55 の倍数で, 3 で割ったときの余りが 1 になるものは, たとえば 55

3 と 11 の公倍数, すなわち 33 の倍数で, 5 で割ったときの余りが 1 になるものは, たとえば 66

3 と 5 の公倍数, すなわち 15 の倍数で, 11 で割ったときの余りが 1 になるものは, たとえば 45

求める自然数を x とすると, x を 3, 5, 11 で割った余りがそれぞれ a, b, c であるとき, x は, $55a+66b+45c$ を, 3 と 5 と 11 の最小公倍数 165 で割

った余りに等しい。

よって、 $55 \cdot 2 + 66 \cdot 1 + 45 \cdot 5 = 401$ 、 $401 = 165 \cdot 2 + 71$ より、求める自然数のうち最小ものは 71 答

5 ユークリッドの互除法

A ユークリッドの互除法

まとめ

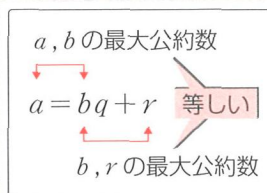
1 定理

一般に、次の定理が成り立つ。

自然数 a 、 b について、 a を b で割ったときの余りを r とすると、

a と b の最大公約数は、

b と r の最大公約数に等しい。



2 ユークリッドの互除法

上の定理を繰り返し用いると、素因数分解が

簡単ではない 2 つの整数についても、その最大公約数を求めることができる。

これを ユークリッドの互除法 または単に 互除法 という。

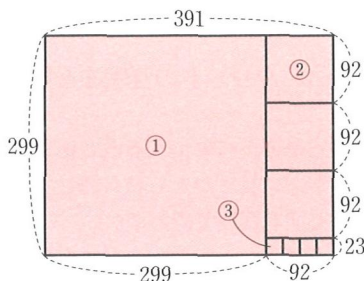
練習 20

教科書 142 ページの③で最後に敷き詰められた正方形の 1 辺の長さ 23 が、教科書 142 ページの問題の答えである。23 は、391 と 299 の最大公約数であることを確かめよ。

教 p.142

指針 長方形に正方形を敷き詰める(2)

右の図の長方形の枠に 1 辺 a cm の正方形のタイルをすき間なく敷き詰める。 a の値をできるだけ大きくする。①～③の順に、長方形の短い方の辺を 1 辺とする正方形を敷き、残った長方形で同様な操作を繰り返すと、③で終わる。



解答 $391 \div 23 = 17$

よって、391 を素因数分解すると $391 = 17 \cdot 23$

$299 \div 23 = 13$

よって、299 を素因数分解すると $299 = 13 \cdot 23$

したがって、391 と 299 の最大公約数は、23 である。終

練習
21

次の2つの整数の最大公約数を、互除法を用いて求めよ。

(1) $629, 259$

(2) $841, 377$

(3) $1463, 304$

指針 互除法 自然数 a, b について、 a を b で割ったときの余りを r とすると、 $(a \text{ と } b \text{ の最大公約数}) = (b \text{ と } r \text{ の最大公約数})$ を利用する。余りが 0 になるまで割り算を繰り返す。

余りが 0 になったときの割る数が、2 つの整数の最大公約数である。

解答 (1) $629 = 259 \cdot 2 + 111$

$$259 = 111 \cdot 2 + 37$$

$$111 = 37 \cdot 3 + 0$$

← 割る数 37, 余り 0

よって、629 と 259 の最大公約数は 37 **答**

(2) $841 = 377 \cdot 2 + 87$

$$377 = 87 \cdot 4 + 29$$

$$87 = 29 \cdot 3 + 0$$

← 割る数 29, 余り 0

よって、841 と 377 の最大公約数は 29 **答**

(3) $1463 = 304 \cdot 4 + 247$

$$304 = 247 \cdot 1 + 57$$

$$247 = 57 \cdot 4 + 19$$

$$57 = 19 \cdot 3 + 0$$

← 割る数 19, 余り 0

よって、1463 と 304 の最大公約数は 19 **答****参考** (1)

$$\begin{array}{r}
 3 \qquad 2 \qquad 2 \\
 37 \overline{) 111} \quad 259 \overline{) 629} \\
 \underline{111} \qquad \underline{222} \quad \underline{518} \\
 0 \qquad \quad 37 \quad 111
 \end{array}$$

右から左へと見るんだよ。
次々と割り算を書き足して
いく計算だよ。

**B ユークリッドの互除法と無理数**

まとめ

長方形の正方形による敷き詰め

2 辺の長さがともに有理数である長方形について、正方形で敷き詰める操作は必ず有限回で終わる。

長方形の一方の辺の長さを 1 とするとき、正方形で敷き詰める操作がいつまでも終わらない場合、長方形のもう一方の辺の長さは無理数である。

練習
22

2 辺の長さが $\frac{17}{13}$, 1 である長方形にすき間なく敷き詰めることができる, 最も大きい正方形の 1 辺の長さを求めよ。

指針 長方形に正方形を敷き詰める(3) ここでは, 2 辺の長さがともに有理数である長方形に, できるだけ大きい 1 種類の正方形を敷き詰めることを考える。このような長方形も, 拡大すると 2 辺の長さは自然数になるので, その長方形で, これまでと同様に, 正方形の敷き詰め操作を考えればよい。答えるときは, もとの大きさに縮小する。

解答 この長方形を 13 倍に拡大すると, 2 辺の長さはそれぞれ 17, 13 になる。拡大した長方形にすき間なく敷き詰めることができる, 最も大きい正方形の 1 辺の長さは, 17 と 13 の最大公約数であるから, 1 である。

ゆえに, 求める最も大きい正方形の 1 辺の長さは $\frac{1}{13}$ **答** $\leftarrow 1 \times \frac{1}{13}$

注意 a を 0 でない整数, b を整数とすると, $\frac{b}{a}$ の形で表すことができる数を有理数という。整数 1 も有理数である。

練習
23

2 辺の長さが $\frac{39}{10}$, $\frac{3}{2}$ である長方形にすき間なく敷き詰めることができる, 最も大きい正方形の 1 辺の長さを求めよ。

指針 長方形に正方形を敷き詰める(4) 2 辺とも有理数が整数になるように拡大した長方形で, 1 種類の正方形を敷き詰める操作を考える。

解答 この長方形を 10 倍に拡大すると, 2 辺の長さはそれぞれ 39, 15 になる。拡大した長方形にすき間なく敷き詰めることができる, 最も大きい正方形の 1 辺の長さは, 39 と 15 の最大公約数であるから, 3 である。

ゆえに, 求める最も大きい正方形の 1 辺の長さは $\frac{3}{10}$ **答** $\leftarrow 3 \times \frac{1}{10}$

練習
24

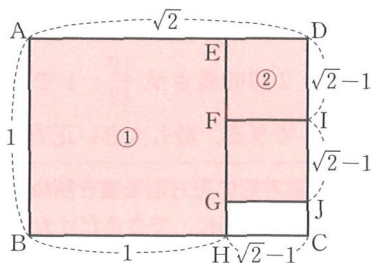
教科書 145 ページの図で最初の長方形 ABCD と相似である長方形を見つけ, 相似であることを証明せよ。

3
章

数学と人間の活動

指針 長方形に正方形を敷き詰める(5)

2 辺の長さが $\sqrt{2}$, 1 の長方形について, 正方形を敷き詰める操作を行う。右の図のように①, ②の正方形を敷くと, もとの長方形 ABCD と相似な長方形が出てくる。証明は, 隣り合う 2 辺の比が等しいことを示せばよい。



解答 長方形 IFHC の長方形 ABCD である。

$$\begin{aligned} \text{(証明)} \quad IF : FH &= (\sqrt{2}-1) : \{1-(\sqrt{2}-1)\} = (\sqrt{2}-1) : (2-\sqrt{2}) \\ &= 1 : \sqrt{2} \qquad \qquad \qquad \leftarrow 2-\sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

$AB : BC = 1 : \sqrt{2}$ であるから,

$$IF : FH = AB : BC$$

ゆえに, 長方形 IFHC $\sim$ 長方形 ABCD 図

注意 さらに正方形を敷き詰める操作を行うと, いつまでも長方形 ABCD と相似な長方形が出てくるので, 操作を終えることができない。 $\sqrt{2}$ は無理数である。

参考 また, 長方形 GHCJ $\sim$ 長方形 DEHC でもある。



教 p.145

$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明はいくつも見つかっている。
インターネットを活用するなどして, このことを調べてみよう。

指針 $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明 $\sqrt{2}$ が有理数でないこと, すなわち, 自然数 a, b を使って $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ の形に表すことができないことを示す。

解答 (証明例) a, b を自然数とする。

$2a^2, b^2$ をそれぞれ素因数分解すると, 素因数 2 の指数は, $2a^2$ は奇数, b^2 は偶数である。

ゆえに, $2a^2$ と b^2 は一致することはなく, $2a^2 \neq b^2$

$$\text{よって, } 2 \neq \frac{b^2}{a^2} \quad \text{ゆえに, } \sqrt{2} \neq \frac{b}{a}$$

したがって, $\sqrt{2}$ は有理数ではなく, 無理数である。図

参考 中学 3 年用の教科書には, 背理法による証明が紹介されている。

$\sqrt{2}$ を有理数と仮定して説明を続けていくと矛盾が起きてしまう。だから有理数とした仮定が誤りであったという証明法である。

6 1 次不定方程式

A 互除法の活用

まとめ

1 $ax+by=c$ を満たす整数 x, y

一般に、2つの整数 a, b が互いに素であるとき、どんな整数 c についても、 $ax+by=c$ を満たす整数 x, y が存在する。

2 互除法の活用

互いに素である2つの整数 a, b に互除法を行うと、余りに1が出てきて、この1を $ax+by$ の形に表すことができる。

$ax+by=1$ を満たす整数の組が $x=p, y=q$ であるとき、 $ax+by=c$ を満たす整数 x, y の組は $x=cp, y=cq$ として得られる。

3章

数学と人間の活動

練習
25

教 p.146

物体の質量が 1 g, 2 g, 3 g, …… , 8 g の場合、分銅を左右の皿にどのようにのせれば天秤ばかりがつり合うか、次の表にまとめよ。ただし、同じ種類の分銅は左右どちらか一方の皿のみにのせるものとする。

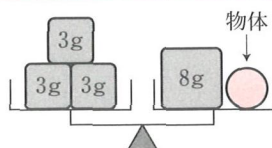
物体の質量	1 g	2 g	3 g	4 g	5 g	6 g	7 g	8 g
3 g の分銅(左)	3							
8 g の分銅(左)	0							
3 g の分銅(右)	0							
8 g の分銅(右)	1							

指針 天秤ばかりをつり合わせる 物体は右の皿にのせるとし、分銅は 3 g, 8 g の2種類しかない場合で考える。使う分銅の数なるべく少なくする素直な解答がよい。

解答 例

物体の質量	1 g	2 g	3 g	4 g	5 g	6 g	7 g	8 g
3 g の分銅(左)	3	0	1	4	0	2	5	0
8 g の分銅(左)	0	1	0	0	1	0	0	1
3 g の分銅(右)	0	2	0	0	1	0	0	0
8 g の分銅(右)	1	0	0	1	0	0	1	0

答



← 7 g
0
2
3
0

練習
26

互除法を利用して、次の等式を満たす整数 x , y の組を 1 つ求めよ。

(1) $52x + 21y = 1$

(2) $26x + 11y = 3$

指針 互除法の活用 互除法を、余りが 1 になるまで続ける。それぞれを余りについて解いて、 $1 = ax + by$ の形に変形する。(2)は、 $26x + 11y = 1$ を満たす整数 x , y の組を求めて、それぞれを 3 倍すればよい。

解答 (1) 52 と 21 に互除法を用いると

$$52 = 21 \cdot 2 + 10 \quad \text{余り } 10 \text{ について解くと} \quad 10 = 52 - 21 \cdot 2$$

$$21 = 10 \cdot 2 + 1 \quad \text{余り } 1 \text{ について解くと} \quad 1 = 21 - 10 \cdot 2$$

$$\text{ゆえに } 1 = 21 - 10 \cdot 2$$

$$= 21 - (52 - 21 \cdot 2) \cdot 2$$

← $10 = 52 - 21 \cdot 2$ を代入

$$= 52 \cdot (-2) + 21 \cdot 5$$

← 52, 21 について整理

よって、求める整数 x , y の組の 1 つは

$$x = -2, y = 5 \quad \text{答}$$

(2) 26 と 11 に互除法を用いると

$$26 = 11 \cdot 2 + 4 \quad \text{余り } 4 \text{ について解くと} \quad 4 = 26 - 11 \cdot 2$$

$$11 = 4 \cdot 2 + 3 \quad \text{余り } 3 \text{ について解くと} \quad 3 = 11 - 4 \cdot 2$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \quad \text{余り } 1 \text{ について解くと} \quad 1 = 4 - 3 \cdot 1$$

$$\text{ゆえに } 1 = 4 - 3 \cdot 1$$

$$= 4 - (11 - 4 \cdot 2) \cdot 1$$

← $3 = 11 - 4 \cdot 2$ を代入

$$= 4 \cdot 3 - 11 \cdot 1$$

$$= (26 - 11 \cdot 2) \cdot 3 - 11 \cdot 1$$

← $4 = 26 - 11 \cdot 2$ を代入

$$= 26 \cdot 3 + 11 \cdot (-7)$$

$$\text{よって、} 26 \cdot 9 + 11 \cdot (-21) = 3$$

← 両辺に 3 を掛ける

したがって、求める整数 x , y の組の 1 つは

$$x = 9, y = -21 \quad \text{答}$$

別解 (2) 上の解の 1~3 行に注目すると、

$$3 = 11 - 4 \cdot 2 = 11 - (26 - 11 \cdot 2) \cdot 2 = 26 \cdot (-2) + 11 \cdot 5$$

$$\text{ゆえに、} 26 \cdot (-2) + 11 \cdot 5 = 3 \quad \text{よって、} x = -2, y = 5$$

B 1 次方程式 $ax+by=c$ の整数解

まとめ

1 次不定方程式

 a, b, c は整数の定数で, $a \neq 0, b \neq 0$ とする。 x, y の 1 次方程式 $ax+by=c$ を成り立たせる整数 x, y の組を, この方程式の 整数解 という。この方程式の整数解を求めることを 1 次不定方程式 を解くという。

3 章

数学と人間の活動

練習
27

教 p.149

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $4x+7y=1$

(2) $5x-7y=3$

【指針】 1 次不定方程式を解く a, b が互いに素であるとき, 1 次方程式 $ax+by=c$ は整数解をもつが, 解は 1 つではない。ここでは, 整数 k を用いて, すべての整数解を表すことを考える。(1), (2)とも, 簡単な考察で, 整数解を 1 つ見つけることができる。その解を利用する。

また, a, b, c は整数で, a, b は互いに素であるとする, ac が b の倍数であるとき, c は b の倍数である。この性質を利用する。

【解答】 (1) $4x+7y=1$ ① $x=2, y=-1$ は, ①の整数解の 1 つである。よって $4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) = 1$ ②①-②から $4(x-2) + 7\{y-(-1)\} = 0$ すなわち $4(x-2) = -7(y+1)$ ③4 と 7 は互いに素であるから, ③より $x-2$ は 7 の倍数である。よって, k を整数として, $x-2=7k$ と表される。これを③に代入すると $y+1=-4k$

①のすべての整数解は

$$x=7k+2, y=-4k-1 \quad (k \text{ は整数}) \quad \text{【答】}$$

(2) $5x-7y=3$ ① $x=2, y=1$ は, ①の整数解の 1 つである。よって $5 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = 3$ ②①-②から $5(x-2) - 7(y-1) = 0$ すなわち $5(x-2) = 7(y-1)$ ③5 と 7 は互いに素であるから, ③より $x-2$ は 7 の倍数である。よって, k を整数として, $x-2=7k$ と表される。これを③に代入すると $y-1=5k$

①のすべての整数解は

$$x=7k+2, y=5k+1 \quad (k \text{ は整数}) \quad \text{【答】}$$

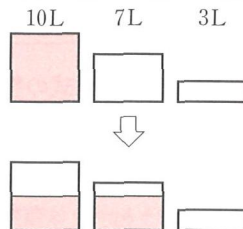
練習
28

教科書 149 ページの問題について、次の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $7x-3y=5$ のすべての整数解を求めよ。
- (2) 方程式 $7x-3y=5$ の整数解のうち、 x が正で最も小さいものは $x=2$, $y=3$ であることを確かめよ。
- (3) 油を 5 L ずつに分ける手順を答えよ。

指針 油分け算 10 L の桶に入っている 10 L の油を、7 L 入る枡と 3 L 入る枡を 1 つずつ使って、5 L と 5 L に分ける問題。次の 3 つの操作しかできないことをもとに、手順を考える。

- ① 桶から 7 L 枡に 7 L の油を入れる。
- ② 7 L 枡から 3 L 枡に移せるだけ油を移す。
- ③ 3 L 枡から桶に 3 L の油を戻す。



解答 (1) $7x-3y=5$ ①

$x=2$, $y=3$ は、①の整数解の 1 つである。

よって $7 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 5$ ②

①-②から $7(x-2) - 3(y-3) = 0$

すなわち $7(x-2) = 3(y-3)$ ③

7 と 3 は互いに素であるから、③より $x-2$ は 3 の倍数である。

よって、 k を整数として、 $x-2=3k$ と表される。

これを③に代入すると $y-3=7k$

①のすべての整数解は

$$x=3k+2, y=7k+3 \quad (k \text{ は整数}) \quad \text{答}$$

(2) (1)の整数解のうち、 x が正で最も小さいのは、 $k=0$ のときであるから、

$x=2$ また、このとき、 $y=3$ 終

(3) 操作の後の油の量を(桶, 7 L 入る枡, 3 L 入る枡)で表す。

答 10 L の桶に油が 10 L 入っている。

(10, 0, 0)

手順① 桶から 7 L 枡に 7 L の油を入れる(①)

(3, 7, 0)

② 7 L 枡から 3 L 枡に 3 L の油を移す(②)

(3, 4, 3)

③ 3 L 枡から桶に 3 L の油を戻す(③)

(6, 4, 0)

④ 7 L 枡から 3 L 枡に 3 L の油を移す(②)

(6, 1, 3)

⑤ 3 L 枡から桶に 3 L の油を戻す(③)

(9, 1, 0)

⑥ 7 L 枡から 3 L 枡に 1 L の油を移す(②)

(9, 0, 1)

⑦ 桶から 7 L 枡に 7 L の油を入れる(①)

(2, 7, 1)

⑧ 7 L 枡から 3 L 枡に 2 L の油を移す(②)

(2, 5, 3)

⑨ 3 L 枡から桶に 3 L の油を戻す(③)

(5, 5, 0)

7 記数法

A 古代と現代の記数法

まとめ

1 記数法

数を表す方法を 記数法 という。

2 古代の記数法

古代エジプトや古代ローマでは、記号を用いる記数法で、1つの記号が5個または10個集まるたびに新しい記号を用いている。

3 位取り記数法

現代においては、日常は位取りの基礎を10とする10進法を用いる。10進法のような、各位の数字を上位の位から並べて数を表す方法を 位取り記数法 という。

3 章

数学と人間の活動

練習 29

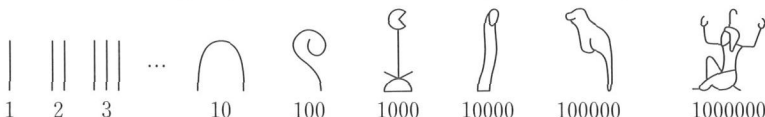
教 p.150

次の数を、古代エジプトの記数法で表せ。

(1) 125

(2) 132010

指針 古代エジプトの記数法 次のような象形文字で表されていた。



1つの記号が10個集まるたびに新しい記号を用いている。

解答 (1) 答

(2) 答

※中村滋・室井和男『数学史 数学5000年の歩み』p.16 共立出版2014年から

練習 30

教 p.151

次の数を、ローマ数字で表せ。

(1) 87

(2) 629

指針 ローマ数字による記数法 足し算や引き算の考えが使われている。

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000

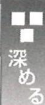
VIIIはV+IIIで8, IXはX-Iで9, CDはD-Cで400を表す。

解答 (1) LXXXVII 答

← $87 = 50 + 30 + 5 + 2$

(2) DCXXIX 答

← $500 + 100 + 20 + (10 - 1)$



現代の記数法について、古代エジプトの記数法やローマ数字による記数法と異なる特徴を説明してみよう。

解答 例 古代の記数法では、数が大きくなるたびに新しい記号が必要となったが、現代の記数法では、各位を表す「0」という数字を用いることで、10進法ならば、0, 1, 2, 3, ……、9の10個の記号でどんなに大きい数も表すことができる。 **終**

B n進法

まとめ

1 2進法

位取りの基礎を2とする数の表し方を **2進法** という。位として 2^0 の位, 2^1 の位, 2^2 の位, ……を用いる。各位の数字は0または1である。

2 n進法

位取りの基礎を n として数を表す方法を, **n進法** という。また, 位取りの基礎となる数 n を **底** という。n進法で表された数では, その数の右下に (n) と書く。なお, 10進法ではふつう (10) を省略する。

教 p.152

練習 31

次の数を10進法で表せ。

- (1) $100100_{(2)}$ (2) $2012_{(3)}$ (3) $1421_{(5)}$ (4) $106_{(7)}$

指針 n進法で表された数を10進法で表す n進法では, 位として, n^0 の位, n^1 の位, n^2 の位, n^3 の位, ……を用いて表してある。

解答 (1) $100100_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
 $= 32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 0 = 36$ **答**

(2) $2012_{(3)} = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$
 $= 54 + 0 + 3 + 2 = 59$ **答**

(3) $1421_{(5)} = 1 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0$
 $= 125 + 100 + 10 + 1 = 236$ **答**

(4) $106_{(7)} = 1 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 = 49 + 0 + 6 = 55$ **答**

教 p.153

練習 32

次の10進法の数を[]内の表し方で表せ。

- (1) 47 [2進法] (2) 55 [2進法] (3) 101 [3進法]

指針 10進法の数を n 進法で表す 割る数を n として、商が0になるまで n で割る
割り算を繰り返し、出てきた余りを逆に並べる。

解答 (1) $47=101111_{(2)}$ **答**

(2) $55=110111_{(2)}$ **答**

(3) $101=10202_{(3)}$ **答**

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad 2 \overline{) 47} \\
 \underline{2 \overline{) 23}} \cdots 1 \\
 \underline{2 \overline{) 11}} \cdots 1 \\
 \underline{2 \overline{) 5}} \cdots 1 \\
 \underline{2 \overline{) 2}} \cdots 1 \\
 \underline{2 \overline{) 1}} \cdots 0 \\
 0 \cdots 1 \\
 \text{商 余り}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad 2 \overline{) 55} \\
 \underline{2 \overline{) 27}} \cdots 1 \\
 \underline{2 \overline{) 13}} \cdots 1 \\
 \underline{2 \overline{) 6}} \cdots 1 \\
 \underline{2 \overline{) 3}} \cdots 0 \\
 \underline{2 \overline{) 1}} \cdots 1 \\
 0 \cdots 1 \\
 \text{商 余り}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (3) \quad 3 \overline{) 101} \\
 \underline{3 \overline{) 33}} \cdots 2 \\
 \underline{3 \overline{) 11}} \cdots 0 \\
 \underline{3 \overline{) 3}} \cdots 2 \\
 \underline{3 \overline{) 1}} \cdots 0 \\
 0 \cdots 1 \\
 \text{商 余り}
 \end{array}$$

8 座標の考え方

A 平面上の点の位置

まとめ

1 座標軸

平面上に点Oをとり、Oで互いに直交する2本の数直線を、右の図のように定める。それぞれ x 軸、 y 軸 といい、まとめて 座標軸 という。また、点Oを 原点 という。

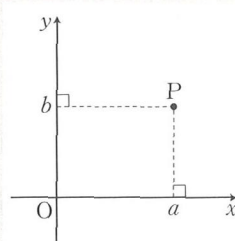
2 点の座標

平面上の点Pの位置は、2つの実数の組 (a, b) で表される。この組 (a, b) を点Pの 座標 といい、 $P(a, b)$ と書く。

原点Oの座標は $(0, 0)$ である。

3 座標平面

座標の定められた平面を 座標平面 という。



練習
33

教 p.155

教科書の例 14 において、次の点の座標を求めよ。

- (1) 地点Oから東に 4 m, 北に 3 m 進んだ位置にある点
 (2) 地点Oから西に 1 m, 南に 5 m 進んだ位置にある点

指針 点の座標 東の方向を x 軸の正の向き、北の方向を y 軸の正の向きとすれば、西の方向は x 軸の負の向き、南の方向は y 軸の負の向きになる。

解答 (1) (4, 3) 答
 (2) (-1, -5) 答

練習
34

教 p.155

教科書の例 15 において、地点Aの座標が (52, 0)、地点PのOからの距離が 15 m、地点PのAからの距離が 41 m であるとき、点Pの位置を求めよ。

指針 2点間の距離と座標 点Pの位置は右の図のようになる。2つの直角三角形を利用して x 座標、 y 座標を求める。

解答 Pの座標を (x, y) とする。ただし、 $y > 0$
 $\triangle OPQ$, $\triangle APQ$ は直角三角形であるから、それぞれに三平方の定理を用いると

$$x^2 + y^2 = 15^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad (52 - x)^2 + y^2 = 41^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

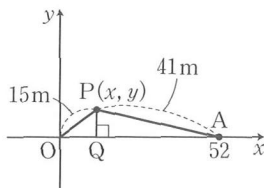
$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ から, } (52 - x)^2 - x^2 = 1456$$

$$\text{式を整理すると } 104x = 1248 \quad \text{よって } x = 12$$

$$\text{これを}\textcircled{1}\text{に代入すると } 12^2 + y^2 = 15^2 \quad \text{すなわち } y^2 = 81$$

$$y > 0 \text{ であるから } y = 9 \quad \text{したがって, P の座標は } (12, 9)$$

地点Pは、地点Oから東に 12 m, 北に 9 m 進んだ位置にある。 答


 深める

教 p.155

教科書の例 15 で位置が特定できる仕組みを、点Pを定規とコンパスで作図する、という観点から説明しよう。

解答 地点Pは、点Oを中心とする半径 13 m の円の周上にあり、かつ、点Aを中心とする半径 37 m の円の周上にある。これらの円を作図し、その交点のうち、 $y > 0$ を満たす点が地点Pである。 終

B 空間の点の位置

まとめ

1 座標軸

空間に点Oをとり、Oで互いに直交する3本の数直線を、右の図のように定める。これらを、それぞれ x 軸、 y 軸、 z 軸 といひ、まとめて 座標軸 という。また、点Oを 原点 という。

2 座標平面

x 軸と y 軸で定まる平面を xy 平面、 y 軸と z 軸で定まる平面を yz 平面、 z 軸と x 軸で定まる平面を zx 平面 といひ、これらをまとめて 座標平面 という。

3 点の座標

点Pを通り各座標軸に垂直な平面が、 x 軸、 y 軸、 z 軸と交わる点を、それぞれ、A、B、Cとする。A、B、Cの各座標軸上での座標がそれぞれ a 、 b 、 c のとき、3つの実数の組 (a, b, c) を点Pの 座標 といひ、 a 、 b 、 c をそれぞれ点Pの x 座標、 y 座標、 z 座標 という。

この点Pを $P(a, b, c)$ と書く。

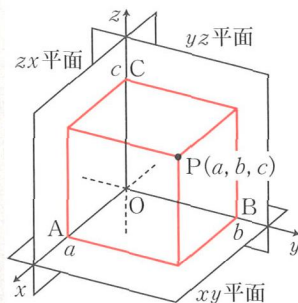
$O(0, 0, 0)$ 、 $A(a, 0, 0)$ 、 $B(0, b, 0)$ 、 $C(0, 0, c)$ である。

4 座標空間

座標の定められた空間を 座標空間 という。

研究 座標空間における2点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 、 $B(x_2, y_2, z_2)$ 間の距離 AB は

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ で与えられる。}$$



3 章

数学と人間の活動

練習 35

教科書の例 16 において、次の点の座標を求めよ。

- (1) 地点Oから東に 3 m、北に 6 m 進み、真上に 2 m 上がった位置にある点B
- (2) 地点Oから西に 4 m、北に 4 m 進み、真下に 3 m 下がった位置にある点C

指針 空間の点の座標 東の方向を x 軸の正の向き、真上の方向を z 軸の正の向きとすると、西の方向は x 軸の負の向き、真下の方向は z 軸の負の向きになる。また、北の方向を y 軸の正の向きとすると、南の方向は y 軸の負の向きになる。

- 解答** (1) $(3, 6, 2)$ 答
(2) $(-4, 4, -3)$ 答

教 p.157

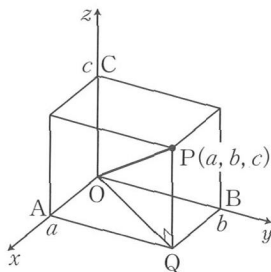
練習
36

右の図の直角三角形 OQP で

$$OP^2 = OQ^2 + PQ^2$$

が成り立つ。

このことを利用して、原点 O と点 P の間の距離 OP を求めよ。



教 p.157

指針 原点と点 P の距離 距離 OP を、点 P の座標 a , b , c を用いて表す。
 $PQ=c$ であるから、OQ を a , b を用いて表せばよい。

解答 直角三角形 OAQ で三平方の定理により

$$OQ^2 = OA^2 + AQ^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{ゆえに } OP^2 = OQ^2 + PQ^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$OP > 0 \text{ より } OP = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{答}$$

9 ゲーム・パズルの中の数学

A ゲームの中の数学

まとめ

三目並べ

縦 2 本、横 2 本の線を引き、線で分けられた 9 個の場所に 2 人が順に○、×を書いて縦・横・斜めのいずれか 1 列をそろえた方の勝ちというゲームがある。

練習
37

このゲームは先手、後手とも最善を尽くせば必ず引き分けになることが知られている。しかし、教科書 160 ページの左の状態から、後手が次に書く場所によっては、その後、後手がどのようにしても先手が勝つ方法がある。そのような手順になるのは、後手が次に×をどこに書いたときか。

教 p.160

指針 先手が勝つ方法 右の図1の状態から、後手が図2の①~④のうちのどれか(回転すれば同じ場所)に×を書いたとき、次のように、すみの場所に○を書けば先手が必ず勝つ。

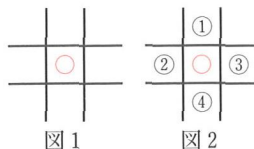
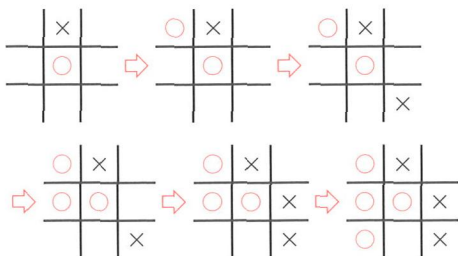
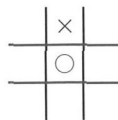


図1

図2



解答 後手が次に、右の図のように、○の上下または左右のところに×を書いたとき **答**



3章

数学と人間の活動

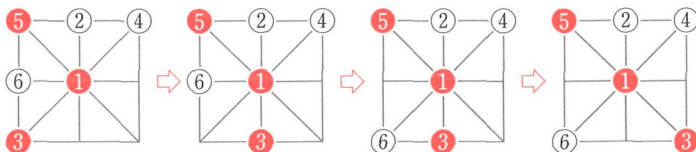
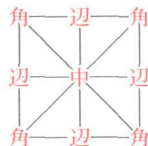
練習 38

教 p.161

タパタンについて、先手、後手の必ず勝つ方法はあるだろうか。いろいろなコマの打ち方や動かし方を調べて、考えてみよう。

指針 タパタン必勝法 右下の図において、先手が「中」に打つと、後手は「角」か「辺」の2通りの打ち方がある。

解答 教科書 161 ページの図のように考えると、先手が最初に「中」、後手が「角」に打った場合、先手が勝つことがわかる。下の図は、先手が最初に「中」、後手が「辺」に打った場合を示している。(先手を①, ③, ⑤, 後手を②, ④, ⑥としている。数字は1手目から6手目までの順番である。)



よって、先手の必ず勝つ方法があり、そのため、後手の必ず勝つ方法はない。

終

教 p.161

深める

世界各国にある三目並べについて、デザインなどの違いを調べたり、何か共通性があったりしないか調べてみよう。

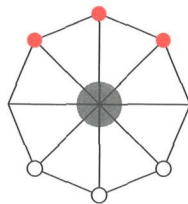
解答 例 ケニアにはシシマという三目並べがある。

〈ルール〉

- ・先手、後手のそれぞれが3個のコマを持ち、右図のように置く。
- ・順に、自分のコマを、線に沿って、あいている点に動かす。中央の点（シシマ）にも動かすことができる。
- ・自分のコマを一直線上に並べた方が勝ち。

〈タパタンとシシマの共通性〉

コマを線に沿って動かして1列に並べた方が勝ちというところが共通している。 **終**

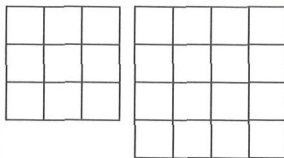


B パズルの中の数学

まとめ

魔方陣

右の図のような正方形のマスの中に自然数を入れて、各行、各列、2つの斜めの数の和をすべて等しくするというパズルを 魔方陣 という。ここでは、 3×3 の魔方陣では1から9までの異なる自然数を、 4×4 の魔方陣では1から16までの異なる自然数を入れるものとする。



練習 39

教 p.162

- (1) 1を含む3個の数の和が15になる組は2組しかない。その2組を求めよ。
- (2) 1は四隅の4つのマスには入らない。その理由を説明せよ。

指針 3×3 の魔方陣の数の並び 縦、横、斜めの等しい3個の数の和 S は $S = (1+2+3+\cdots+9) \div 3 = 45 \div 3 = 15$ また、中央の数は5。

- (1) 1を除いた2から9までの自然数から、数の和が14になる2つの数の組を調べる。
- (2) (1)を根拠として説明することができる。

解答 (1) 1, 5, 9と1, 6, 8 **答**

- (2) 四隅の数は、縦、横、斜めの和で15になる必要がある。しかし、(1)により、1を含む3数は2組しかない。したがって、1は四隅には入らない。 **終**

練習
40

- (1) $b=1$ とした場合の魔方陣を完成させよ。
 (2) 教科書 163 ページの [3] で $d=1$ とした場合の魔方陣を完成させよ。

指針 3×3 の魔方陣の完成 $e=5$ と練習 39 による。

- (1) $b=1$ とすると, $e=5$ より, $h=9$ が決まり,
 $a=6, c=8$ または, $a=8, c=6$ が決まる。
 続いて, g, i , さらに d, f の順に決まる。

- (2) (1) と同様に進めることができる。

解答

- (1)

6	1	8
7	5	3
2	9	4

 または

8	1	6
3	5	7
4	9	2

 答

- (2)

6	7	2
1	5	9
8	3	4

 または

8	3	4
1	5	9
6	7	2

 答

注意 上の解答のように, 4 つの魔方陣が考えられたが, これらを回転したり, 裏返したりすると, どれも数の並びが一致する。すなわち, 3×3 の魔方陣は, 本質的にはただ 1 通りであるといえる。

練習
41

教科書 163 ページの ①～③ について, 4 つの数の和が 34 であることを確かめよ。

指針 4×4 の魔方陣の数の並び 縦, 横, 斜めの等しい 4 つの数の和 S は

$$S = (1 + 2 + 3 + \cdots + 16) \div 4 = 136 \div 4 = 34$$

右の魔方陣 (教科書 163 ページの魔方陣) では, 次の

- ①～③ の 4 つの数の和も 34 に等しい。

- ① 四隅にある 4 つの数
 ② 中央の正方形内にある 4 つの数
 ③ 四隅の正方形内にある 4 つの数

解答

- ① $1 + 4 + 13 + 16 = 34$ ② $7 + 6 + 11 + 10 = 34$
 ③ 左上: $1 + 14 + 12 + 7 = 34$ 右上: $15 + 4 + 6 + 9 = 34$
 左下: $8 + 11 + 13 + 2 = 34$ 右下: $10 + 5 + 3 + 16 = 34$
 いずれも 34 になっている。 終

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

3 章

数学と人間の活動

練習
42

教科書の例 17 を使って、教科書 164 ページの①、②の 4 つの数の和が、どのような魔方陣でも 34 になることを説明せよ。

指針 4×4 の魔方陣の数の並び

例 17 では、四隅の数を除く 12 個の数の和が $4S-N$ と $4S-M$ の 2 通り表されている。さらに、 $M+N=2S$ であるから、 $M=N=S$ を示すことができる。

① M

② N

解答 $4S-N=4S-M$ から $M=N$

また $M+N=2S$

よって、 $M=N=S$ となり、①と②の 4 つの数の和はどのような魔方陣でも 34 になる。終

$$\leftarrow \begin{cases} 4S-N \\ 4S-M \end{cases}$$

注意 4×4 の魔方陣では、各行、各列、2 つの斜めの 4 つの数の和だけでなく、四隅にある数の和、中央の正方形の中の数の和も 34 である。

練習
43

次の魔方陣で a 、 b 、 c を求めよ。また、魔方陣を完成させよ。

(1)

2	5		
16	11	a	6
	b	c	
	10	4	

(2)

3		a	10
		b	11
	9	16	
13		1	c

指針 4×4 の魔方陣の完成 各行、各列、2 つの斜めの数の和、および、四隅にある数の和、中央の正方形の中の数の和は、いずれも 34 である。

(1) a 、 b 、 c の順に求めると、右下隅、5 の右の 2 数も求められる。

(2) b 、 a 、 c の順に求める。3 の右、11 の下、……も求められる。

解答 (1) $16+11+a+6=34$ より $a=1$

$5+11+b+10=34$ より $b=8$

$11+1+8+c=34$ より $c=14$ ← $N=34$

よって $a=1$ 、 $b=8$ 、 $c=14$

魔方陣は右のようになる。答

2	5	15	12
16	11	1	6
3	8	14	9
13	10	4	7

(2) $10+b+9+13=34$ より $b=2$

$a+2+16+1=34$ より $a=15$

$3+10+13+c=34$ より $c=8$ ← $M=34$

よって $a=15$ 、 $b=2$ 、 $c=8$

魔方陣は右のようになる。答

3	6	15	10
14	7	2	11
4	9	16	5
13	12	1	8

練習
44

4×4の魔方陣では、教科書 165 ページの④がいえることを、教科書 164 ページのように図をかくなどして説明せよ。

指針 4×4の魔方陣の数の並び 教科書 163 ページの魔方陣では、四隅の正方形内にある4つの数の和も34になるが、右の魔方陣では、左上、右下の4つの数の和は36、右上、左下の4つの数の和は32である。そこで、次のことが予想できる。

7	2	16	9
12	15	1	6
5	14	4	11
10	3	13	8

3
章

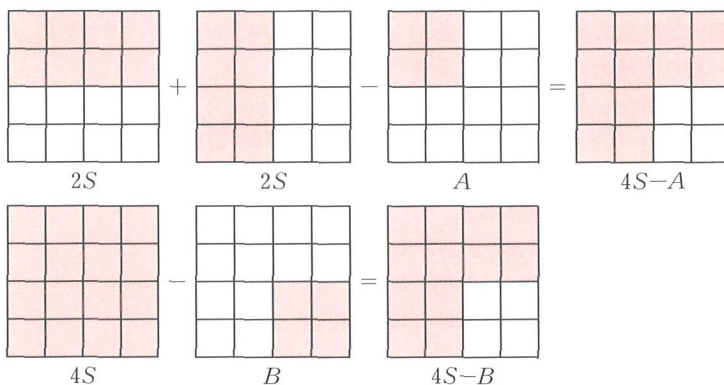
数学と人間の活動

④ 左上の4つの数の和＝右下の4つの数の和

④ 右上の4つの数の和＝左下の4つの数の和

説明は、例 17 にならい、 $4S - (\text{右下の4つの数の和})$ を表す図と同じ図を、 S と左上の4つの数の和で作ることを考える。

解答 左上の4つの数の和を A 、右下の4つの数の和を B 、 $S=34$ とする。
図で色のついたマスの中の数の和に着目すると、 A 、 B 、 S には次のような等式が成り立つ。



ゆえに $4S - A = 4S - B$ から $A = B$

よって 左上の4つの数の和＝右下の4つの数の和

また 右上の4つの数の和＝左下の4つの数の和

についても同様。終

第3章 章末問題 A

教 p.169

1. 十の位の数わからない4桁の自然数 $12\square4$ が3の倍数であるとき、 $\square$ に入る数をすべて求めよ。

指針 3の倍数 各位の数の和が3の倍数になる数を考える。

解答 $\square$ に入る数を x とすると、各位の数の和は

$$1+2+x+4=x+7$$

$x+7$ が3の倍数であればよい。

これを満たす0から9までの整数 x は $x=2, 5, 8$

よって、 $\square$ に入る数は 2, 5, 8 **答**

教 p.169

2. 494, 2243, 3197 のいずれを割っても、余りが17となる自然数のうち、最大のものを求めよ。

指針 最大公約数の利用 3つの数から余りの17を引いた数のいずれを割っても割り切れる最大の数が、求める数である。

解答 3つの数から余りの17を引くと

$$494-17=477, 2243-17=2226, 3197-17=3180$$

ゆえに、477, 2226, 3180の最大公約数が、求める自然数である。

それぞれ素因数分解すると

$$477=3^2 \cdot 53 \quad 2226=2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 53 \quad 3180=2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 53$$

よって、最大公約数は $3 \cdot 53=159$

したがって、求める自然数は 159 **答**

教 p.169

3. 次の2つの整数の最大公約数を、互除法を用いて求めよ。

(1) 667, 299

(2) 517, 187

(3) 923, 377

指針 互除法による最大公約数の求め方 自然数 a, b について、 a を b で割った余りを r とすると、 a と b の最大公約数と、 b と r の最大公約数が等しいことを繰り返し用いて求める。

解答 (1) $667=299 \cdot 2+69$

$$299=69 \cdot 4+23$$

$$69=23 \cdot 3+0$$

← 割る数 23, 余り 0

最大公約数は 23 答

(2) $517=187 \cdot 2+143$

$$187=143 \cdot 1+44$$

$$143=44 \cdot 3+11$$

$$44=11 \cdot 4+0$$

← 割る数 11, 余り 0

最大公約数は 11 答

(3) $923=377 \cdot 2+169$

$$377=169 \cdot 2+39$$

$$169=39 \cdot 4+13$$

$$39=13 \cdot 3+0$$

← 割る数 13, 余り 0

最大公約数は 13 答

3章

数学と人間の活動

教 p.169

4. 7で割ると3余り, 5で割ると2余る自然数 n を, 35で割ったときの余りを求めよ。

指針 1 次不定方程式の解 自然数 n は, 整数 x, y を用いて $n=7x+3, n=5y+2$ と表される。これより, 方程式 $7x+3=5y+2$ の整数解を求める。

解答 自然数 n は整数 x, y を用いて, 次のように表される。

$$n=7x+3, n=5y+2$$

$$\text{よって} \quad 7x+3=5y+2$$

$$\text{すなわち} \quad 7x-5y=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x=2, y=3$ は, $\textcircled{1}$ の整数解の1つである。

$$\text{よって} \quad 7 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から} \quad 7(x-2) - 5(y-3) = 0$$

$$\text{すなわち} \quad 7(x-2) = 5(y-3) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

7と5は互いに素であるから, $\textcircled{3}$ より $x-2$ は5の倍数である。

よって, k を整数として, $x-2=5k$ と表される。

$$\text{すなわち} \quad x=5k+2$$

$$\text{よって} \quad n=7x+3=7(5k+2)+3=35k+17$$

したがって, n を35で割ったときの余りは 17 答

第3章 章末問題 B

教 p.169

5. 500 以下の自然数のうち、正の約数が 15 個である数の個数を求めよ。

指針 約数の個数 自然数 N の素因数分解が $N = p^a \cdot q^b$ となるとき、 N の正の約数の個数は $(a+1) \cdot (b+1)$ 個である。

解答 $15 = 1 \times 15$, $15 = 3 \times 5$ から、正の約数が 15 個である自然数は

$$p^{14} \text{ または } p^2 q^4 \quad (p, q \text{ は異なる素数})$$

と表される。

[1] $2^{14} > 500$ であるから、 p^{14} で表される 500 以下の自然数はない。

[2] $p^2 q^4$ で表される 500 以下の自然数は

$$2^2 \cdot 3^4 = 324, \quad 3^2 \cdot 2^4 = 144, \quad 5^2 \cdot 2^4 = 400$$

したがって 3 個 **答**

教 p.169

6. 190 円の商品 A と 290 円の商品 B をそれぞれいくつか買って合計の代金がちょうど 4500 円になるようにしたい。それぞれいくつ買えばよいか。

指針 1 次不定方程式の解 A を x 個、B を y 個買うとする。

$190x + 290y = 4500$ を満たす負でない整数 x, y を求める。

解答 A を x 個、B を y 個買うとすると

$$190x + 290y = 4500$$

この方程式を満たす負でない整数 x, y を求める。

$$\text{両辺を 10 で割ると} \quad 19x + 29y = 450 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x = -3, y = 2$ は、 $19x + 29y = 1$ の整数解の 1 つである。

$$\text{よって} \quad 19 \cdot (-3) + 29 \cdot 2 = 1$$

$$\text{両辺に 450 を掛けて} \quad 19 \cdot (-1350) + 29 \cdot 900 = 450 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から} \quad 19(x + 1350) + 29(y - 900) = 0$$

$$\text{すなわち} \quad 19(x + 1350) = -29(y - 900) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

19 と 29 は互いに素であるから、 $\textcircled{3}$ より $x + 1350$ は 29 の倍数である。

よって、 k を整数として $x + 1350 = 29k$ と表される。

$$\text{すなわち} \quad x = 29k - 1350$$

$$\text{これを} \textcircled{3} \text{ に代入すると} \quad y - 900 = -19k$$

$\textcircled{1}$ のすべての整数解は

$$x = 29k - 1350, \quad y = -19k + 900 \quad (k \text{ は整数})$$

ここで $x \geq 0, y \geq 0$ であるから、これを満たす k の値は $k = 47$

$$\text{このとき} \quad x=29 \cdot 47 - 1350 = 13, \quad y = -19 \cdot 47 + 900 = 7$$

$$\text{よって} \quad x=13, \quad y=7$$

答 Aを13個, Bを7個

教 p.169

7. 自然数 N を 3 進法と 5 進法で表すと、ともに 2 桁の数であり、各位の数の並びが逆になるという。 N を 10 進法で表せ。

指針 n 進法 $N = ab_{(3)}$, $N = ba_{(5)}$ と表され、 a , b は 1 か 2 である。

解答 $N = ab_{(3)}$ とすると $N = ba_{(5)}$ である。

ただし、 a , b は 1 か 2 である。

それぞれ 10 進法で表すと

$$ab_{(3)} = a \times 3^1 + b \times 3^0 = 3a + b$$

$$ba_{(5)} = b \times 5^1 + a \times 5^0 = 5b + a$$

$$\text{ゆえに} \quad 3a + b = 5b + a \quad \text{すなわち} \quad a = 2b$$

$$a, b \text{ は 1 か 2 であるから} \quad a = 2, \quad b = 1$$

$$\text{よって} \quad N = 3 \cdot 2 + 1 = 7 \quad \text{答}$$

教 p.169

8. 座標空間において、3 点 $A(1, 2, -2)$, $B(3, 4, -2)$, $C(3, 2, 0)$ を頂点とする三角形はどんな三角形であるか。

指針 座標空間の 2 点間の距離 座標空間における 2 点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 間の距離は $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ (教科書 158 ページを参照)

$$\text{解答} \quad AB = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2 + \{(-2) - (-2)\}^2}$$

$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(3-3)^2 + (2-4)^2 + \{0 - (-2)\}^2}$$

$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$CA = \sqrt{(1-3)^2 + (2-2)^2 + \{(-2) - 0\}^2}$$

$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

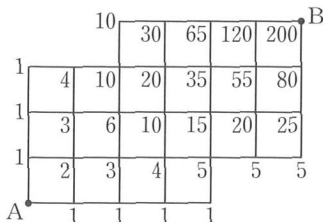
$AB = BC = CA$ であるから、 $\triangle ABC$ は 正三角形 である。答

総合問題

1 ※問題文は、教科書 170 ページを参照。

指針 最短の道順の総数 (1)では、Aから↑か→のどちらか一方だけで行ける交差点には、すべて1を書き入れ、他の交差点では(*)を使う。(2)は、それぞれの道順の総数を、同じものを含む順列で表し、(*)を使う。

解答 (1)



最短の道順
の総数は
200 **答**

教科書 39 ページを
見直してみよう。



(2) Pまでの道順の総数は ${}_4C_3$ 通り

Qまでの道順の総数は ${}_4C_2$ 通り

Rまでの道順の総数は ${}_5C_3$ 通り

よって、(*)より ${}_5C_3 = {}_4C_2 + {}_4C_3$ **終**

← ↑2個と→3個の順列

2 ※問題文は、教科書 170 ページを参照。

指針 確率の計算 (2)は余事象の確率、(3)は互いに排反な2つの事象の和事象の確率を求める。

解答 (1) $\frac{3}{5}$ **答**

← 表の晴と晴が交わる欄

(2) 明日、明後日の少なくとも一方は雨でないという事象は、明日、明後日ともに雨であるという事象の余事象である。

今日の天気は晴れであるから、求める確率は

$$1 - \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} = 1 - \frac{3}{100} = \frac{97}{100} \quad \text{答} \quad \leftarrow \text{晴} \rightarrow \text{雨} : \frac{1}{10}, \text{雨} \rightarrow \text{雨} : \frac{3}{10}$$

(3) 明日、明後日の2日間雨でない事象は、次の2つの事象の和事象である。

[1] 今日晴れで、明日は晴れ、明後日は晴れか曇りである場合

$$\text{確率は } \frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{10} \right) = \frac{27}{50} \quad \leftarrow \text{晴} \rightarrow \text{晴} : \frac{3}{5}, \text{晴} \rightarrow \text{曇} : \frac{3}{10}$$

[2] 今日晴れで、明日は曇り、明後日は晴れか曇りである場合

$$\text{確率は } \frac{3}{10} \times \left(\frac{3}{10} + \frac{2}{5} \right) = \frac{21}{100} \quad \leftarrow \text{曇} \rightarrow \text{晴} : \frac{3}{10}, \text{曇} \rightarrow \text{曇} : \frac{2}{5}$$

[1], [2]は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{27}{50} + \frac{21}{100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \quad \text{答}$$

3 ※問題文は、教科書 171 ページを参照。

指針 作図，線分の比に関する定理 作図の説明には平行線と線分の比を使い，線分の比 $BL:LC$ ， $LF:FA$ を求めるときは，チェバの定理，メネラウスの定理を用いる。

解答 (1) ③ R を通り辺 AB に垂直な直線と，

P を通り辺 AB に平行な直線との
交点を S とする。

④ 点 A と点 S を通る直線と辺 OB
の交点を S' とする。

⑤ S' から辺 AB に垂線 S'R' を下ろす。

また，S' を通り辺 AB に平行な直
線と辺 OA の交点を P' とする。

⑥ P' から辺 AB に垂線 P'Q' を下ろす。

四角形 P'Q'R'S' が求める正方形である。

四角形 P'Q'R'S' は長方形であるから， $S'R' = P'S'$ を示す。

$SR \parallel S'R'$ より $AS:AS' = SR:S'R'$

$PS \parallel P'S'$ より $AS:AS' = PS:P'S'$

ゆえに $SR:S'R' = PS:P'S' \cdots (*)$

四角形 PQRS は正方形であるから $SR = PS$

これと (*) から $SR:S'R' = SR:P'S'$

よって， $SR \cdot P'S' = S'R' \cdot SR$ であるから

$$P'S' = S'R'$$

ゆえに，四角形 P'Q'R'S' は正方形である。

点 P' は辺 OA 上，点 S' は辺 OB 上，2 点 Q', R' は辺 AB 上にある。

よって，四角形 P'Q'R'S' は $\triangle OAB$ に内接する正方形である。 **終**

(2) チェバの定理より $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \cdots \cdots ①$

また， $DE \parallel BC$ より $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \cdots \cdots ②$

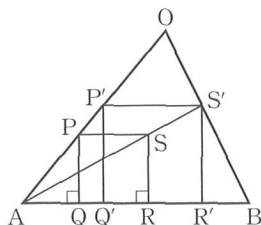
①，②から $\frac{BL}{LC} = 1$ よって $BL:LC = 1:1$ **答**

(3) 正方形 DMNE の面積 x^2 **答**

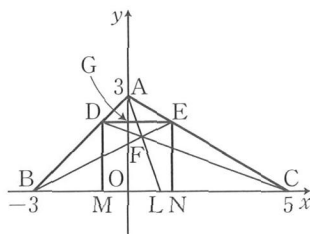
$$\triangle BDM = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{答}$$

$$\triangle ADE = \frac{1}{2}x(3-x) \quad \text{答}$$

$$\triangle CEN = x(4-x) \quad \text{答} \quad \leftarrow NC = BC - BN = 8 - 2x$$



総合問題



別解 $\triangle ADE = \frac{3}{16}x^2$, $\triangle CEN = \frac{5}{6}x^2$

← $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

← $\triangle CAO \sim \triangle CEN$

(4) $\triangle ABC$ の面積について

$$x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x(3-x) + x(4-x) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \quad \text{よって, } x = \frac{24}{11} \quad \text{答}$$

(5) $\triangle ABL$ と直線 CD にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BC}{CL} \cdot \frac{LF}{FA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(2)より, $BC : CL = 2 : 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$

$$DE \parallel BC \text{ から } AD : AB = DE : BC = \frac{24}{11} : 8 = 3 : 11$$

よって $AD : DB = 3 : 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ から } \frac{2}{1} \cdot \frac{LF}{FA} \cdot \frac{3}{8} = 1 \quad \text{ゆえに } \frac{LF}{FA} = \frac{4}{3}$$

よって $LF : FA = 4 : 3 \quad \text{答}$

4 ※問題文は、教科書 172 ページを参照。

指針 自然数の積と素因数の個数 (1)②では, 2^2 の倍数 ($< 2^3$) には素因数 2 が 2 個あるが, そのうちの 1 個はすでに 2 の倍数として数えられていることに注意する。 2^3 , 2^4 の倍数でも同様。(2)では, $10 = 2 \cdot 5$ より, 素因数 2 と 5 の 1 組で末尾に 0 が 1 個並ぶ。素因数 2, 5 の個数に注意する。

解答 (1) ① $2, 2^2, 2^3, 2^4$ の倍数の個数は, 20 をそれぞれの数で割ったときの商に等しい。

求める個数はそれぞれ 10 個, 5 個, 2 個, 1 個 答

② $10 + 5 + 2 + 1 = 18$ (個) 答

③ $3, 3^2, 5, 7$ の倍数の個数は, それぞれ 6, 2, 4, 2 (個)

素因数 3, 5, 7 の個数はそれぞれ, $6 + 2 = 8, 4, 2$ (個)

以上より ア $\cdots \cdots 18$, イ $\cdots \cdots 8$, ウ $\cdots \cdots 4$, エ $\cdots \cdots 2$ 答

(2) $10 = 2 \cdot 5$ であり, 素因数 2, 5 の個数を比べると, $18 > 4$

よって, 末尾に連続して並ぶ 0 の個数は 4 個 答

(3) 2 進法で表すと, 素因数分解したときの素因数 2 の数の分だけ, 連続して 0 が並ぶ。よって, その個数は 18 個 答

5 ※問題文は、教科書 172 ページを参照。

指針 1 次不定方程式の解 求める年を西暦 N 年とすると, x, y, z を整数として, $N = 3x + 1, N = 5y + 2, N = 7z + 3$ と表される。2 つを組み合わせた 2 組の不定方程式を解いて, 条件に合う N の値を求める。

解答 求める年を西暦 N 年とすると、 N は0以上の整数 x, y, z を用いて次のように表される。

$$N=3x+1, N=5y+2, N=7z+3$$

$$\text{よって} \quad 3x+1=5y+2=7z+3$$

$$3x+1=5y+2 \text{ から} \quad 3x-5y=1 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

$x=2, y=1$ は、 $\textcircled{1}$ の整数解の1つである。

$$\text{よって} \quad 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{ から} \quad 3(x-2)-5(y-1)=0$$

$$\text{すなわち} \quad 3(x-2)=5(y-1)$$

3と5は互いに素であるから、 $x-2$ は5の倍数である。

よって、 k を整数として、 $x-2=5k$ と表される。

$$\text{ゆえに} \quad x=5k+2$$

$$\text{したがって} \quad N=3x+1=3(5k+2)+1=15k+7$$

$$15k+7=7z+3 \text{ から} \quad 15k-7z=-4 \quad \cdots\cdots\textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ の右辺を1とした方程式 $15k-7z=1$ について、 $k=1, z=2$ はその整数解の1つである。

$$\text{よって} \quad 15 \cdot 1 - 7 \cdot 2 = 1$$

$$\text{両辺に} -4 \text{ を掛けて} \quad 15 \cdot (-4) - 7 \cdot (-8) = -4 \quad \cdots\cdots\textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}-\textcircled{4} \text{ から} \quad 15(k+4)-7(z+8)=0$$

$$\text{すなわち} \quad 15(k+4)=7(z+8)$$

15と7は互いに素であるから、 $k+4$ は7の倍数である。

よって、 ℓ を整数として、 $k+4=7\ell$ と表される。

$$\text{ゆえに} \quad k=7\ell-4$$

$$\text{したがって} \quad N=15k+7=15(7\ell-4)+7=105\ell-53$$

$$2001 \leq N \leq 2100 \text{ より} \quad 2001 \leq 105\ell-53 \leq 2100$$

$$\text{これを満たす整数} \ell \text{ は} \quad \ell=20$$

$$\text{したがって、求める年数は} \quad N=105 \cdot 20 - 53 = 2047$$

答 2047年

6 ※問題文は、教科書172ページを参照。

指針 ゲームの必勝法 このゲームでは、自分がある自然数 a を言ったとき、相手が次に言う自然数の個数に対応して、続いて必ず $a+4$ を言うことができる。また、最後の数 n を相手に言わせ、勝つには、自分は $n-1$ を言えればよい。すなわち、 $\cdots, n-9, n-5, n-1$ を言える人は必ず勝てる。

解答 (1) 数「17」を言えば勝ちとなる。

数「13」を言えば、相手が言える数は「14」
または「14 15」または「14 15 16」で
あるから、自分は必ず「17」を言える。

同様に、「13」を言うには「9」を、「9」

を言うには「5」を、「5」を言うには「1」を言う必要がある。

逆に、「1」を言えれば、その後は相手が言った数の個数に応じて自分が言う数の個数を変えることで、「5」「9」「13」「17」を必ず言うことができる。

数「1」を言えるのは先手であるから、 $n=18$ のとき、このゲームは先手必勝である。

○：自分 ●：相手

13	14	15	16	17	18
○	●	○	○	○	●
○	●	●	○	○	●
○	●	●	●	○	●

答 (ア) 先手必勝

(2) 次の4つの場合に分けて考える。

[1] $n=4k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき

(1)と同様に考えると、最初に「1 2 3」と言えば、数「 $4k-1$ 」を必ず言うことができる。

よって、先手必勝である。

[2] $n=4k+1$ ($k=0, 1, 2, \dots$) のとき

$k=0$ すなわち $n=1$ のとき、先手が必ず負ける。

$k \geq 1$ のとき、数「 $4k$ 」を言えば勝ちとなる。

(1)と同様に考えると、数「 $4k$ 」を言うには数「4」を言う必要がある。

後手のとき、数「4」を必ず言うことができる。

以上から、後手必勝である。

[3] $n=4k+2$ ($k=0, 1, 2, \dots$) のとき

(1)と同様に考えると、最初に「1」と言えば、数「 $4k+1$ 」を必ず言うことができる。

よって、先手必勝である。

[4] $n=4k+3$ ($k=0, 1, 2, \dots$) のとき

(1)と同様に考えると、最初に「1 2」と言えば、数「 $4k+2$ 」を必ず言うことができる。

よって、先手必勝である。終